模块二 常用逻辑用语（★★）

内容提要

常用逻辑用语包括充分条件和必要条件、全称量词命题和存在量词命题两部分内容，有关考题由于涉及其它板块的知识，所以有一定的综合性，下面先归纳本节涉及到的一些知识点.

1．充分条件、必要条件的判断

概念：命题“若 p，则 q”为真命题，则称 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件	
$p\Rightarrow q$ 且 $q\not\Rightarrow p$	p 是 q 的充分不必要条件
$p\not\Rightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$	p 是 q 的必要不充分条件
$p\Rightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$	p 是 q 的充要条件，记作 $p\Leftrightarrow q$
$p\not\Rightarrow q$ 且 $q\not\Rightarrow p$	p 是 q 的既不充分也不必要条件

2．集合角度看充分条件和必要条件：若 $A\quad B$，则 $x\in A$ 是 $x\in B$ 的充分不必要条件. 我们将这一结论简记为“小可推大，大不推小”.

3．含有一个量词的命题的否定：

①全称量词命题“$\forall x\in M$，$p(x)$”的否定为“$\exists x\in M$，$\neg p(x)$”.

②存在量词命题“$\exists x\in M$，$p(x)$”的否定为“$\forall x\in M$，$\neg p(x)$”.

4．命题及其否定的真假关系：命题 p 与该命题的否定的真假性必定相反.

典型例题

类型Ⅰ：判断充分条件、必要条件

【例 1】设 $x\in\mathbf{R}$，则“$|x-1|<1$”是“$\dfrac{x+4}{x-5}<0$”的（　　）

（A）充分不必要条件　（B）必要不充分条件　（C）充要条件　（D）既不充分也不必要条件

解析：所给的两个不等式都能解，先把不等式解出来再看，

由 $|x-1|<1$ 可得 $-1<x-1<1$，所以 $0<x<2$，由 $\dfrac{x+4}{x-5}<0$ 可得 $(x+4)(x-5)<0$，所以 $-4<x<5$，

故问题等价于判断“$0<x<2$”是“$-4<x<5$”的什么条件，

若 $0<x<2$，则必有 $-4<x<5$，所以充分性成立；

若 $-4<x<5$，则不一定有 $0<x<2$，例如，$x=-1$ 满足 $-4<x<5$，但不满足 $0<x<2$，故必要性不成立；

所以“$|x-1|<1$”是“$\dfrac{x+4}{x-5}<0$”的充分不必要条件.

答案：A

【反思】若 $A\quad B$，则 $x\in A$ 是 $x\in B$ 的充分不必要条件，简称“小推大”.

【变式 1】若 a，b 为非零实数，则“$2^a>2^b$”是“$\ln a^2>\ln b^2$”的（　　）

（A）充分不必要条件　（B）必要不充分条件　（C）充要条件　（D）既不充分也不必要条件

解析：两个不等式虽不能解，但都能化简，可先化简再看，

$2^a>2^b\Leftrightarrow a>b$，$\ln a^2>\ln b^2\Leftrightarrow 2\ln|a|>2\ln|b|\Leftrightarrow|a|>|b|$，

所以问题等价于判断“$a>b$”是“$|a|>|b|$”的什么条件，下面分析两者能否互推，

当 $a>b$ 时，$|a|>|b|$ 不一定成立，例如 $a=1$，$b=-2$ 时，满足 $a>b$，但 $|a|<|b|$，所以充分性不成立；

当 $|a|>|b|$ 时，$a>b$ 也不一定成立，例如 $a=-2$，$b=1$ 时，满足 $|a|>|b|$，但 $a<b$，所以必要性不成立；

故“$2^a>2^b$”是“$\ln a^2>\ln b^2$”的既不充分也不必要条件.

答案：D

【反思】判断两个复杂不等式之间的充分条件、必要条件关系，可先通过等价变形将不等式化简再看.

【变式 2】已知 $a,b\in\mathbf{R}$，则“$a>b$”的一个充分不必要条件为（　　）

（A）$a^2>b^2$　　（B）$\ln a>\ln b$　　（C）$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　（D）$2^a>2^b$

解析：注意审题，选项是 $a>b$ 的充分不必要条件，所以应该是选项能推出 $a>b$，但 $a>b$ 不能推出选项，可将各选项化简再看，

A 项，$a^2>b^2\Leftrightarrow|a|>|b|$，由上面的变式 1 可知 $|a|>|b|$ 是 $a>b$ 的既不充分也不必要条件，故 A 项错误；

B 项，$\ln a>\ln b\Leftrightarrow a>b>0$，于是只需判断 $a>b>0$ 是否为 $a>b$ 的充分不必要条件，

当 $a>b>0$ 时，$a>b$ 成立；但当 $a>b$ 时，$a>b>0$ 不一定成立，例如 $a=-1$，$b=-2$ 时，满足 $a>b$，但不满足 $a>b>0$，所以 $a>b>0$ 是 $a>b$ 的充分不必要条件，故 B 项正确；

C 项，由 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ 不能得出 $a>b$，例如，取 $a=-1$，$b=1$，满足 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，但 $a<b$，

所以 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ 不是 $a>b$ 的充分条件，故 C 项错误；

D 项，$2^a>2^b\Leftrightarrow a>b$，所以 $2^a>2^b$ 是 $a>b$ 的充要条件，故 D 项错误.

答案：B

【总结】判断 p 是 q 的充分条件、必要条件这类题，可直接判断 p，q 能否互推，也可将它们分别进行等价转化后再判断.

类型 II：根据充分条件、必要条件求参

【例 2】若“$-2<x<m$”是“$x^2-x-6<0$”的必要不充分条件，则实数 m 的取值范围是_____.

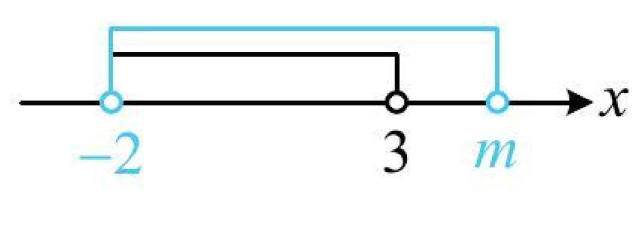
解析：不等式的解集容易写出，故可翻译成集合间的包含关系，再求 m 的范围，

$x^2-x-6<0\Leftrightarrow(x+2)(x-3)<0\Leftrightarrow-2<x<3$，记 $A=\{x\,|\,-2<x<3\}$，$B=\{x\,|\,-2<x<m\}$，

因为 $-2<x<m$ 是 $x^2-x-6<0$ 的必要不充分条件 $\Leftrightarrow x^2-x-6<0$ 是 $-2<x<m$ 的充分不必要条件，

所以 $A\quad B$，如图，应有 $m>3$，此处 m 不能等于 3，否则两个不等式应为充要条件关系.

答案：$(3,+\infty)$



【反思】p 是 q 的必要不充分条件 $\Leftrightarrow q$ 是 p 的充分不必要条件 $\Leftrightarrow q$ 代表的范围　p 代表的范围；对必要不充分条件不熟悉的同学可按此先转化为充分不必要条件，再分析参数范围.

【变式】关于 x 的不等式 $ax^2-2x+1>0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立的充要条件是（　　）

（A）$0<a<1$　　（B）$0\le a<1$　　（C）$a>1$　　（D）$a<0$ 或 $a>1$

解析：注意到平方项系数为字母，故需讨论其等于 0 的情形，

当 $a=0$ 时，$ax^2-2x+1>0$ 即为 $-2x+1>0$，该不等式只在 $x<\dfrac{1}{2}$ 时成立，不合题意；

当 $a\ne 0$ 时，要使 $ax^2-2x+1>0$ 恒成立，需满足二次函数 $y=ax^2-2x+1$ 开口向上，且与 x 轴没有交点，

所以 $\begin{cases}a>0\\ \Delta=4-4a<0\end{cases}$，解得：$a>1$；

综上所述，$ax^2-2x+1>0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立的充要条件是 $a>1$.

答案：C

【总结】由充分不必要、必要不充分条件求参，可用集合的包含关系来分析；由充要条件求参，则直接等价考虑.

类型Ⅲ：全称量词命题、存在量词命题的否定

【例 3】命题 $p:\forall x\in\mathbf{R}$，$x^3-x^2+1\le 0$ 的否定是（　　）

（A）$\exists x\notin\mathbf{R}$，$x^3-x^2+1>0$　　（B）$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^3-x^2+1\le 0$

（C）$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^3-x^2+1>0$　　（D）$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^3-x^2+1>0$

解析：否定全称量词命题，先将“$\forall$”改为“$\exists$”，再否定结论，

命题 p 的否定为 $\exists x\in\mathbf{R}$，$x^3-x^2+1>0$.

答案：D

【例 4】设命题 $p:\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2+1=0$，则命题 p 的否定是（　　）

（A）$\forall x\notin\mathbf{R}$，$x^2+1=0$　　（B）$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+1\ne 0$　　（C）$\exists x\notin\mathbf{R}$，$x^2+1=0$　　（D）$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2+1\ne 0$

解析：否定存在量词命题，先将“$\exists$”改为“$\forall$”，再否定结论，

命题 p 的否定为 $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+1\ne 0$.

答案：B

【总结】否定全称量词命题，先把“任意”改为“存在”，再否定结论；否定存在量词命题，先把“存在”改为“任意”，再否定结论.

类型Ⅳ：判断全称量词命题、存在量词命题的真假

【例 5】(多选)下列命题中，真命题有（　　）

（A）$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+\dfrac{1}{4}\geq 0$　　（B）$\exists x>0$，$\ln x+\dfrac{1}{\ln x}<2$

（C）$\exists x\in\mathbf{R}$，$\mathrm{e}^x<2x$　　（D）$\forall x\in\mathbf{R}$，$2^x\geq x^2$

解析： A 项，$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+\dfrac{1}{4}=(x-\dfrac{1}{2})^2\geq 0$，故 A 项为真命题；

B 项，观察发现当 $\ln x<0$ 时，所给不等式成立，故只需找到使 $\ln x<0$ 的一种情形，即可判断该命题为真，

当 $x=\mathrm{e}^{-1}$ 时，$\ln x+\dfrac{1}{\ln x}=\ln\mathrm{e}^{-1}+\dfrac{1}{\ln\mathrm{e}^{-1}}=-2<2$，故 B 项为真命题；

C 项，$\mathrm{e}^x<2x$ 为超越不等式，不易直接判断，可构造函数求导分析，

设 $f(x)=\mathrm{e}^x-2x(x\in\mathbf{R})$，则 $f'(x)=\mathrm{e}^x-2$，所以 $f'(x)>0\Leftrightarrow x>\ln 2$，$f'(x)<0\Leftrightarrow x<\ln 2$，

从而 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln 2)$ 上↘，在 $(\ln 2,+\infty)$ 上↗，故 $f(x)\geq f(\ln 2)=\mathrm{e}^{\ln 2}-2\ln 2=2-2\ln 2>0$，

所以 $\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $\mathrm{e}^x-2x>0$，即 $\mathrm{e}^x>2x$，故 C 项为假命题；

D 项，当 $x\to-\infty$ 时，$2^x\to 0$，$x^2\to+\infty$，$2^x\geq x^2$ 不成立，故所给命题为假命题，下面举个反例，

当 $x=-1$ 时，$2^x=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$，$x^2=(-1)^2=1$，所以 $2^x<x^2$，故 D 项为假命题.

答案： AB

【总结】 判断全称量词命题为真，需论证所有情形下结论都成立，而要判断其为假，则只需寻找一种使结论不成立的反例即可；判断存在量词命题为真，只需寻找一种使结论成立的情况即可，而要判断其为假，则需证明所有情形下，结论都不成立.

类型Ⅴ：由全称量词命题、存在量词命题的真假求参

【例 6】已知命题 $p:\forall x\in\mathbf{R}$，$3^x+3^{-x}>a$ 是假命题，则实数 a 的取值范围是_____.

解析： 直接由命题 p 为假不易求 a 的范围，而 p 为假等价于 p 的否定为真，故可从反面考虑，

因为 p 为假命题，所以 p 的否定“$\exists x\in\mathbf{R}$，使得 $3^x+3^{-x}\leq a$”为真命题，所以 $a\geq(3^x+3^{-x})_{\min}$，

因为 $3^x+3^{-x}\geq 2\sqrt{3^x\cdot 3^{-x}}=2$，当且仅当 $3^x=3^{-x}$，即 $x=0$ 时取等号，所以 $(3^x+3^{-x})_{\min}=2$，故 $a\geq 2$.

答案： $[2,+\infty)$

【反思】 ①全称量词命题或存在量词命题与其否定的真假性一定相反；②遇到根据命题为假求参的问题，可考虑转化为由该命题否定为真来分析.

【变式 1】若命题 $p:\exists x\in\mathbf{R}$，$ax^2+2ax+1\leq 0$ 是假命题，则实数 a 的取值范围是_____.

解析： 正面考虑命题 p 为假，不易求 a 的范围，故可从反面考虑，p 为假等价于 p 的否定为真，

由题意，命题 p 的否定为 $\forall x\in\mathbf{R}$，$ax^2+2ax+1>0$，且此命题为真命题，平方项系数为字母，需讨论，

当 $a=0$ 时，$ax^2+2ax+1>0$ 即为 $1>0$，恒成立，满足题意；

当 $a\neq 0$ 时，$ax^2+2ax+1>0$ 恒成立等价于 $\begin{cases}a>0\\ \Delta=4a^2-4a<0\end{cases}$，解得：$0<a<1$；

综上所述，实数 a 的取值范围是 $[0,1)$.

答案： $[0,1)$

【变式 2】已知命题 $p:\forall x\in\mathbf{R}$，$ax^2-ax+1>0$ 恒成立，命题 $q:\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2+x+a=0$，若 p，q 中有且仅有一个为真命题，则实数 a 的取值范围是_____.

解析： p 与 q 有且只有一个为真命题有 p 真 q 假、p 假 q 真两种情况，分别讨论即可，

当 p 真 q 假时，首先，p 为真命题，所以 $ax^2-ax+1>0$ 恒成立，平方项系数为字母，需讨论其是否为 0，

①若 $a=0$，则 $ax^2-ax+1>0$ 即为 $1>0$，显然恒成立；

②若 $a\neq 0$，则 $ax^2-ax+1>0$ 恒成立 $\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta=(-a)^2-4a<0\end{cases}$，解得：$0<a<4$；

综合①②可得当 p 为真命题时，应有 $0\leq a<4$；

其次，q 为假命题，所以 q 的否定"$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+x+a\neq 0$"为真命题，

从而方程 $x^2+x+a=0$ 没有实数解，故 $\Delta=1-4a<0$，解得：$a>\frac{1}{4}$，

与前面 p 为真命题的 $0\leq a<4$ 取公共部分可得 $\frac{1}{4}<a<4$；

p 真 q 假分析完了，再看 p 假 q 真的情形，无需重复计算，在 p 真 q 假的结果中各自取补集即可，

由前面的分析过程知当 p 为真命题时，$0\leq a<4$，所以 p 为假命题时应有 $a<0$ 或 $a\geq 4$，

同理，当 q 为假命题时，有 $a>\frac{1}{4}$，所以当 q 为真命题时，应有 $a\leq\frac{1}{4}$，所以当 p 假 q 真时，$a<0$；

综上所述，实数 a 的取值范围是 $(-\infty,0)\cup(\frac{1}{4},4)$.

答案： $(-\infty,0)\cup(\frac{1}{4},4)$

【反思】当两个命题一真一假时，可选其中一种情况来求参数范围，另一种情形直接在此基础上各自取补集再考虑即可.

强化训练

1.（2022・陕西模拟・★）若 x，y 为正实数，则"$\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$"是"$\log_2 x>\log_2 y$"的（　　）

（A）充分不必要条件　（B）必要不充分条件　（C）充要条件　（D）既不充分也不必要条件

2.（2023 • 成都一模 • ★★）已知直线 l，m 和平面 α ，β ，若 $\alpha\perp\beta$ ，$l\perp\alpha$ ，则“$l\perp m$”是“$m\perp\beta$”的（　　）

（A）充分不必要条件　（B）必要不充分条件　（C）充要条件　（D）既不充分也不必要条件

3.（2023 • 全国甲卷 • ★★）“$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$”是“$\sin\alpha+\cos\beta=0$”的（　　）

（A）充分条件但不是必要条件　（B）必要条件但不是充分条件

（C）充要条件　（D）既不是充分条件也不是必要条件

4.（2022 • 天津一模 • ★★）在等比数列 $\{a_n\}$ 中，公比为 q，则“$q>1$”是“$a_{n+1}>a_n(n\in\mathbf{N}^*)$”的（　　）

（A）充分不必要条件　（B）必要不充分条件　（C）充要条件　（D）既不充分也不必要条件

5.（2023 • 辽宁模拟 • ★★）“对任意的 $x\in\mathbf{R}$ ，都有 $2kx^2+kx-\frac{3}{8}<0$”的一个充分不必要条件是（　　）

（A） $-3<k<0$　（B） $-3<k\le 0$　（C） $-3<k<1$　（D） $k>-3$

6.（2022 •安徽月考 •★★）已知集合 $A=\{x\,|\,y=\ln(3x^2-7x+4)\}$ ，$B=\{x\,|\,27^{x+m}-9>0\}$ ，若“$x\in A$”是“$x\in B$”的必要不充分条件，则实数 m 的取值范围是_____.

7．（2022 • 北京模拟 • ★）已知命题 $p:\exists x>5$， $2x^2-x+1>0$，则 p 的否定为（　　）

（A） $\forall x\le 5$， $2x^2-x+1\le 0$　　（B） $\forall x>5$， $2x^2-x+1\le 0$

（C） $\exists x>5$， $2x^2-x+1\le 0$　　（D） $\exists x\le 5$， $2x^2-x+1>0$

8．（2022 • 眉山模拟 • ★）命题 $p:\forall x\in\mathbf{Q}$， $x^2\in\mathbf{Q}$的否定为（　　）

（A） $\forall x\notin\mathbf{Q}$， $x^2\notin\mathbf{Q}$　　（B） $\forall x\in\mathbf{Q}$， $x^2\notin\mathbf{Q}$　　（C） $\exists x\notin\mathbf{Q}$， $x^2\notin\mathbf{Q}$　　（D） $\exists x\in\mathbf{Q}$， $x^2\notin\mathbf{Q}$

9．（2022 • 玉林模拟 • ★★）若命题 $p:\exists x\in\mathbf{R}$， $x^2+2(a+1)x+1<0$ 是假命题，则实数 a 的取值范围是_____.

10．（2022 • 承德模拟 • ★★★）命题 $p:\exists x\in[-1,1]$，使 $x^2+1<a$ 成立；命题 $q:\forall x>0$， $ax<x^2+1$ 恒成立. 若命题 p 与 q 有且只有一个为真命题，则实数 a 的取值范围是_____.